Άσκηση: Να λυθούν σύγχρονως τα γραμμικά συστήματα. 12-11-14.

$x_1+x_2+x_3+x_4=2$	$y_1+y_2+y_3+y_4=0$
$x_1+x_2+x_3+2x_4=4$	$2y_1+y_2+y_3+y_4=1$
$x_1+x_2+2x_3+3x_4=7$	$3y_1+2y_2+y_3+y_4=1$
$x_1+2x_2+3x_3+4x_4=10$	$4y_1+3y_2+2y_3+y_4=2$

και να βρεθούν οι ορίζουσες των πινάκων με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss χωρίς οδήγηση.

$A_1x=b_1 \qquad A_2y=b_2$

Αλλάζω 1η με 4η στήλη και 2η με 3η στήλη του δεύτερου συστήματος, οπότε προκύπτει ο πίνακας συντελεστών του 1ου συστήματος.

→ Το διάνυσμα αγνώστων στο 2ο σύστημα θα είναι: $z^T=(y_4\ y_3\ y_2\ y_1)$

	$\underline{1}$	1	1	1	2	0	
1	1	1	1	2	4	1	
1	1	1	2	3	7	1	
1	1	2	3	4	10	2	
		0	0	$\underline{1}$	2	1	
		0	$\underline{1}$	2	5	1	
		$\underline{1}$	2	3	8	2	

$x_1=(2-1\cdot0-1\cdot1-1\cdot2)/1=-1$ | $z_1=(0-1\cdot1-1(-1)-1\cdot1)/1=-1$

$x_4=2/1=2$ | $z_4=1/1=1$

$x_3=(5-4)/1=1$ | $z_3=(1-2\cdot1)/1=-1$

$x_2=(8-2\cdot1-3\cdot2)/1=0$ | $z_2=(2-2(-1)-3\cdot1)/1=1$

$x^T=[-1\ \ 0\ \ 1\ \ 2]$

$z^T=[-1\ \ 1\ \ -1\ \ 1]$

$x=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ z=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\det(A_1)=(-1)^1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=-1$

$\det(A_2)=(-1)^2\cdot\det(A_1)=-1$

- Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{bmatrix}$$

με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση και με την LU ανάλυση του PA, ο μεταθετικός πίνακας που θα προκύψει.

$$\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\ \xleftarrow{max}\\ \frac{1}{2}\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{I}\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}}_{i}$$

$$\begin{array}{c}\\ \frac{1}{3}\end{array}\begin{array}{cc|ccc}\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}&0\\ \frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&1\end{array}\quad\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\frac{4}{3}\quad 1\quad -\frac{1}{3}\quad -\frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
1/2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\
 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
1/2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\\
\hline
 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
\frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\
 & & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1\\
\hline\hline
 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
 & & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1\\
 & & & \frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}
\end{array}$$

$x_{11}=(0-(-\frac{1}{4})-\frac{3}{4})/2=-\frac{1}{4}$

$x_{21}=(0-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4})/\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}$

$x_{31}=1/\frac{4}{3}=\frac{3}{4}$

$x_{13}=(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4})/2=-\frac{1}{4}$

$x_{23}=(1+\frac{1}{8})/\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

$x_{33}=-\frac{1}{4}$

$x_{12}=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})/2=\frac{3}{4}$

$x_{22}=(\frac{1}{2}+\frac{1}{8})/\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}$

$x_{32}=-\frac{1}{3}/\frac{4}{3}=-\frac{1}{4}$

$$(A^{-1})^T=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\ A'=PA=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix}1&&\\ \frac{1}{2}&1&\\ 1/2&1/3&1\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}2&1&1\\&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\&&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

$$L\underbrace{UX}_{Y}=I\Leftrightarrow\begin{cases}LY=I\\UX=Y\end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & & & 1 & 0 & 0\\
\frac{1}{2} & 1 & & 0 & 1 & 0\\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$y_{11}=1/1=1$

$y_{21}=(0-\frac{1}{2}\cdot 1)/1=-\frac{1}{2}$

$y_{31}=(0-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3})/1=-\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{bmatrix}=Y^T$$

$x_{12}=0$

$x_{22}=1$

$x_{13}=0,\ x_{23}=0$

$x_{33}=1$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

- $A'^{-1} = (PA)^{-1} = A^{-1}P^{-1} \Leftrightarrow$

  $A^{-1} = A'^{-1}P.$